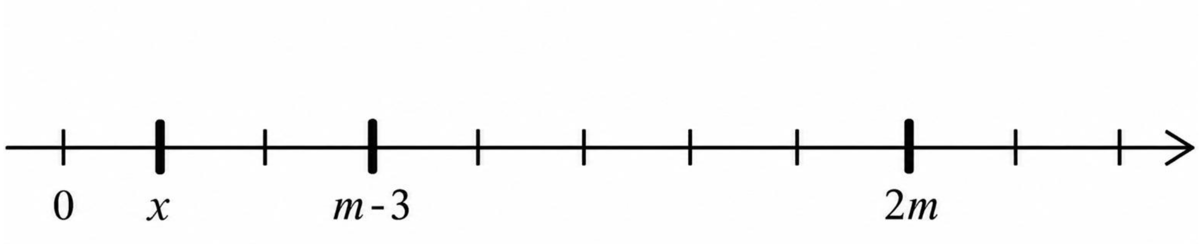
Matematicko-logická soutěž

Červen 2025/26

Svá řešení odevzdávejte písemně nebo elektronicky Mgr. Kopřivové (koprivova@teleinformatika.eu) nebo Ing. Knápkovi (knapek@teleinformatika.eu) nejpozději o půlnoci 15.6.2026. Každé kolo bude vyhodnoceno samostatně, body se budou sčítat za všechna kola. Soutěžící, který bude mít v červnu na svém kontě nejvíce získaných bodů, získá odměnu.

Úloha č.1: NEZNÁMÁ OSA

Na reálné ose s jednotkou x jsou zobrazena čísla $m-3$ a $2m$.



Zjisti hodnotu x.

Problem no.2 : 32 WAYS TO WASTE A MATH CLASS

A student got bored during class and started messing around with a calculator. He picked two different integers and tried a few basic operations with them.

First, he added the numbers together, then found their difference, then multiplied them, and finally divided one by the other. When he added up all the results, he got 32.

Which two numbers could he have entered into the calculator? Find all possible pairs.

Úloha č.3: VLAK DO CÍLE

Dva stejně dlouhé vlaky jedoucí konstantní rychlostí se při jízdě proti sobě míjí 10 sekund, kdyby jely stejným směrem, míjely by se 20 sekund.

Kolikrát kratší dobu potřebuje rychlejší vlak k dojezdu do svého cíle než pomalejší, jestliže jim do cíle zbývá stejně dlouhá trasa?

Řešení:

Úloha č.1: NEZNÁMÁ OSA

Číslo $m-3$ má od nuly vzdálenost 3x, číslo $2m$ má od nuly vzdálenost 8x, vytvoříme soustavu rovnic.

$$m-3=3x$$

$$2m=8x$$

Po jejím vyřešení získáváme odpověď: $x=3$.

Problem no.2 : 32 WAYS TO WASTE A MATH CLASS

Hledaná čísla označíme A, B

Platí

$$A+B+AB+A-B+\frac{A}{B}=32$$

Po úpravě:

$$2A+AB+\frac{A}{B}=32$$

Protože násobení, sčítání a odčítání jsou na celých číslech uzavřené operace, jejich výsledky jsou taktéž celá čísla. Dělením celých čísel může vzniknout i číslo racionální, nicméně celkový výsledek je číslo celé. Z toho ujišťujeme, že podíl $\frac{A}{B}$ je celé číslo. Znamená to tedy, že A je násobkem čísla B, můžeme zapsat: $A=k\cdot B, k\in\mathbb{Z}$.

$$2\cdot k\cdot B+k\cdot B\cdot B+\frac{k\cdot B}{B}=32$$

$$2kB+kB^2+k=32$$

$$k(B^2+2B+1)=32$$

$$k(B+1)^2=32$$

Hledáme tedy mocninu nějakého celého čísla, která je dělitelem čísla 32. Těmto mocninám odpovídá 1, 4, 16.

Řešíme:

$(B+1)^2=1\rightarrow\ \ B=-2$ nebo $B=0$. (nula nemůže být kvůli dělení)

$(B+1)^2=4\rightarrow\ \ B=-3$ nebo $B=1$.

$(B+1)^2=16\rightarrow\ \ B=-5$ nebo $B=3$.

K jednotlivým situacím dopočítáme číslo k a poté číslo A.

$$B=-2\ \rightarrow k=32,\qquad A=-64$$

$$B = -3 \ \rightarrow k = 8, \qquad A = -24$$

$$B = 1 \rightarrow k = 8, \qquad A = 8$$

$$B = -5 \rightarrow k = 2 \rightarrow A = -10$$

$$B = 3 \rightarrow k = 2 \rightarrow A = 6$$

Řešením jsou dvojice:

$[A, B] \in \{[-64, -2], [-24, -3], [8,1], [-10, -5], [6,3]\}$.

Úloha č.3: VLAK DO CÍLE

Označme společnou délku obou vlaků n metrů. Pomalejší bude 1. vlak s rychlostí v_1 a rychlejší bude 2. vlak s rychlostí v_2.

Situace první – vlaky jedou proti sobě

Představme si, že jeden z vlaků stojí a druhý ho míjí. Aby ho minul, musí ujet dráhu $s = 2n$.

Tím, že se ale druhý vlak pohybuje proti němu, vlastně mu „pomáhá“ svou rychlostí urazit tu trasu dříve, čili pro pozorovatele z pomalejšího vlaku jede ten druhý rychlostí $v_1 + v_2$.

Čili platí: $2n = 10(v_1 + v_2)$

Situace druhá – vlaky jedou vedle sebe.

Pokud by se pomalejší vlak nepohyboval, musel by opět druhý vlak ujet dráhu $2n$. Ale tím, že se vlak pohybuje, „komplikuje“ druhému vlaku to předjetí. Pro pozorovatele v pomalejším vlaku to vypadá, že se rychlejší vlak pohybuje rychlostí $v_2 - v_1$.

Platí tedy: $2n = 20(v_2 - v_1)$

Dáme do rovnosti $10(v_1 + v_2) = 20(v_2 - v_1)$

A odtud získáváme: $v_2 = 3v_1$

Jeden z vlaků má trojnásobnou rychlost oproti druhému, tedy bude ve svém cíli **třikrát rychleji.**