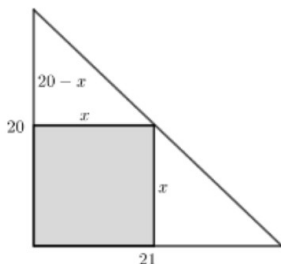


Matematicko-logická soutěž

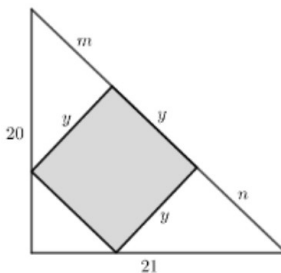
Školní rok 2023/24 - duben 2024 - řešení

Úloha č. 1

Do zadaného trojúhelníku můžeme vepsat čtverec dvojím způsobem:



První řešení: vepsaný čtverec může ležet stranami na obou odvěsnách a může mít s trojúhelníkem společný jeden vrchol. Stranu čtverce určíme z podobnosti trojúhelníků $\frac{20-x}{x} = \frac{20}{21}$ - úpravou získáme rovnost $420 - 21x = 20x$ a následně $x = \frac{420}{41}$ jednotek.



Druhé řešení pokládá vepsaný čtverec stranou na přeponu trojúhelníku. Délku přepony snadno vypočítáme z Pythagorovy věty $20^2 + 21^2 = c^2$, tedy $c = 29$ jednotek.

Z podobnosti trojúhelníků zjistíme délky úseků m a n , které jsou $m = \frac{20y}{21}$ a $n = \frac{21y}{20}$ jednotek.

Nyní můžeme snadno dosadit do vztahu $m + y + n = c$ a získáme rovnici $\frac{20y}{21} + y + \frac{21y}{20} = 29$, kterou můžeme upravit na tvar $400y + 420y + 441y = 12180$ výpočtem určíme hodnotu y , která je $y = \frac{12180}{1261}$ jednotek.

Úloha č. 2

Pavel placed one-tenth of all the pieces - $\frac{x}{10}$

Jarka placed twice as many as Pavel - $\frac{2 \cdot x}{10} = \frac{x}{5}$

Míša placed 40 pieces fewer than Jarka - $\frac{x}{5} - 40$

Mom placed half again as many as Pavel - $\frac{1,5 \cdot x}{10} = \frac{3 \cdot x}{20}$

Father placed 565 pieces - so, $\frac{x}{10} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5} - 40 + \frac{3 \cdot x}{20} + 565 = x \Rightarrow x = 1500$ pieces.

Úloha č. 3

Z druhé podmínky plyne, že Dřimalův džbánek má objem 3 litry a Stydlínův 9 litrů (platí $3 \cdot 3 = 9$, a kdyby měl Dřimal džbánek jiný, musel by být Stydlínův džbánek aspoň dvanáctilitrový).

Nyní ze čtvrté podmínky plyne, že Šmudlův džbánek je o 3 litry větší než Štístkův.

Společně s třetí podmínkou tak víme, že Štístko, Prófa a Šmudla mají postupně džbánky s objemy buď 4, 6 a 7, nebo 5, 7 a 8 litrů.

Z první podmínky potom plyne, že jediné možnosti, jak měli trpaslíci džbánky rozděleny, jsou:

3	4	5	6	7	8	9
Dřimal	Štístko	Kejchal	Prófa	Šmudla	Rejpal	Stydlín
Dřimal	Štístko	Rejpal	Prófa	Šmudla	Kejchal	Stydlín
Dřimal	Rejpal	Štístko	Kejchal	Prófa	Šmudla	Stydlín

Ověříme-li poslední, pátou, podmínku, zjistíme, že první dvě vyznačené možnosti nevyhovují ($6 + 7 \neq 8 + 5 + 4$), zatímco třetí ano ($7 + 8 = 4 + 5 + 6$). Kejchal se Šmudlou tedy dohromady přinesou $6 + 8 = 14$ litrů vody.