Matematicko-logická soutěž

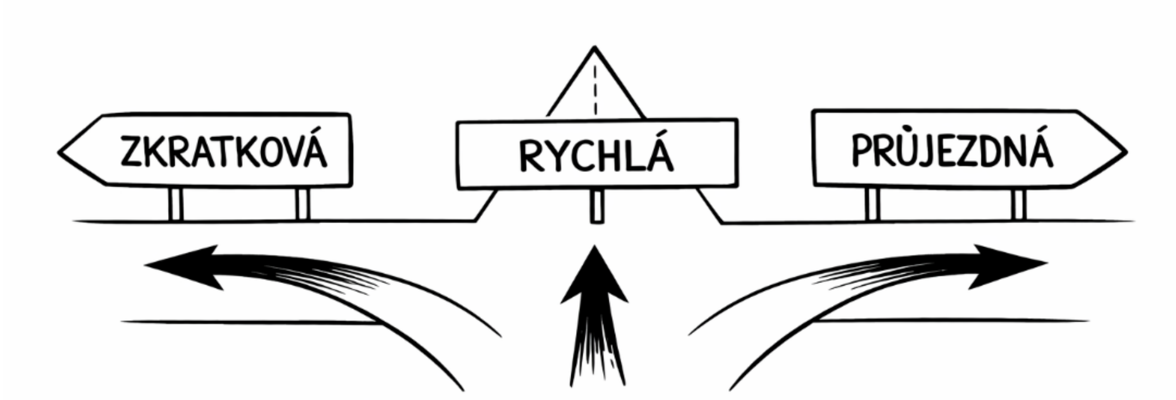
Duben 2025/26

Svá řešení odevzdávejte písemně nebo elektronicky Mgr. Kopřivové (koprivova@teleinformatika.eu) nebo Ing. Knápkovi (knapek@teleinformatika.eu) nejpozději o půlnoci posledního dne v daném měsíci. Každé kolo bude vyhodnoceno samostatně, body se budou sčítat za všechna kola. Soutěžící, který bude mít v červnu na svém kontě nejvíce získaných bodů, získá odměnu.

Úloha č.1: NAVIG-LH-ACE NA PRAVDIVOSTNÍ KŘIŽOVATCE

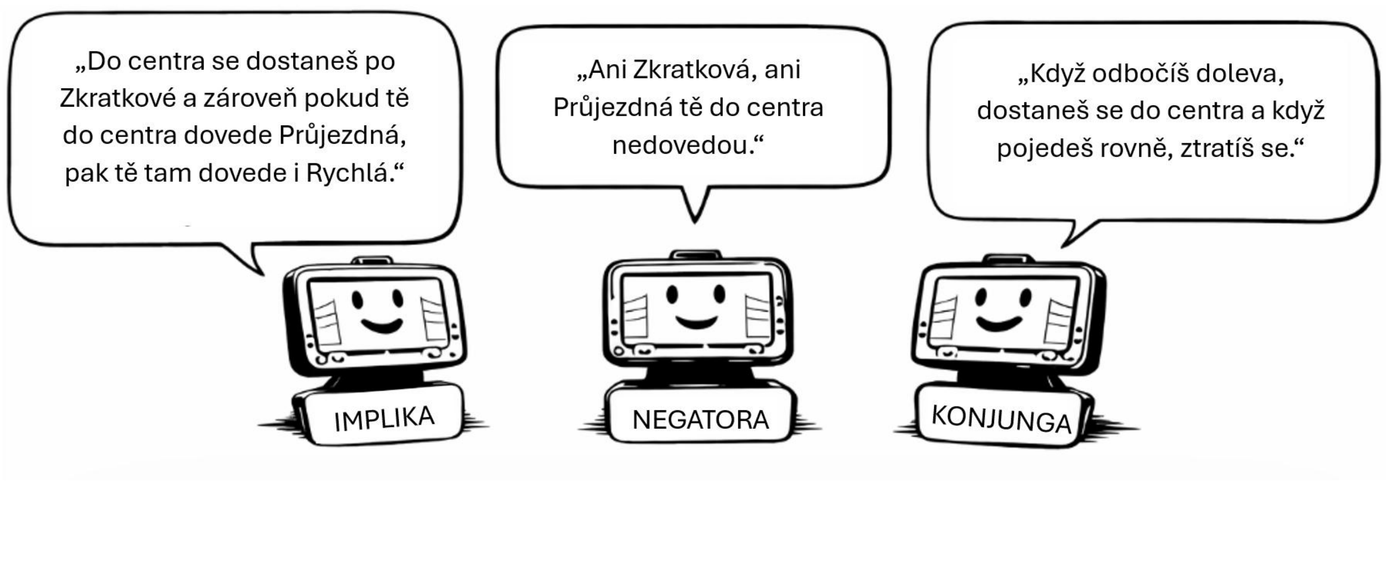
Viktor Výrok jede ve své formuli po silnici a snaží se dostat do centra města. Dorazí na rozcestí, kde má tři možnosti:

- odbočit doleva na ulici **Zkratková**
- jet rovně po ulici **Rychlá**
- odbočit doprava na ulici **Průjezdná**



V autě má tři AI navigace: **IMPLIKA**, **NEGATORA** a **KONJUNGA**. Bohužel všechny tři navigace jsou nejen zmatené, ale navíc **vždy lžou**.

Zeptá se jich, jak se dostat do centra, a ony odpoví:



Na základě těchto odpovědí Viktor dojde k závěru, že jedna cesta do centra nevede určitě, jedna tam vede na 50 % a když se vydá tou třetí, dojede do centra určitě. Která cesta je která?

Problem no.2 : A VERY ODD FAMILY STORY

In records old, where dust has grown,
A curious line was once set down:

"Two girls were born to the selfsame mother,
At the very same time as one another,
The selfsame day, the selfsame year,
And yet no twins are present here."

"How can this be?" you start to say.
The answer is not so far away.
A hidden hint, a quiet clue,
Lies in a riddle set for you:

"I am an odd number, simple and true,
Take one letter away, I become even to you."

And one more note, both rare and true:
No life was lost among that crew.

So, gather the clues and think it through.
What are their names, each of that crew?

Úloha č.3: I NUDA SE POČÍTÁ

Jeden student se při hodině začal nudit a tak si aspoň začal ťukat do kalkulačky. Zvolil si dvě různá celá čísla a zkusil s nimi provést několik základních operací.

Nejprve spočítal jejich součet, potom rozdíl, následně součin, a nakonec i podíl jednoho čísla druhým. Když všechny tyto výsledky sečetl, vyšlo mu číslo **32**.

Jaká dvě čísla mohl student do kalkulačky zadat? Nalezni všechny takové dvojice.

Řešení:

Úloha č.1

Jeden způsob, kterým lze úlohu řešit, je využití výrokové logiky.

Označíme si výroky:

Z: Zkratková ulice vede do centra
P: Průjezdná ulice vede do centra
R: Rychlá ulice vede do centra

Pak přepíšeme do logického zápisu výroky jednotlivých navigací:
$IMPLIKA$: $V_1 = \ Z \wedge (P \rightarrow R)$
$NEGATORA$: $V_2 = \ \neg Z \wedge \neg P$
$KONJUNGA$: $V_3 = \ Z \wedge \neg R$

Tyto výroky jsou nepravdivé (navigace lžou), chceme-li slyšet pravdu, uděláme jejich negace
$\neg V_1 = \neg Z \vee (p \wedge \neg R)$
$\neg V_2 = Z \vee P$
$\neg V_3 = \neg Z \vee R$

Teď už stačí najít takovou kombinaci pravdivostí výroků Z, P, R tak, aby všechny tři navigace lhaly, čili aby negace jejich výroků byly pravdivé.

Z prvního řádku tabulky například vyplývá, že pokud by do centra vedly všechny tři cesty, tak potom IMPLIKA by nelhala, ale říkala pravdu – což neodpovídá zadání.

$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{V_1}$	$\boldsymbol{\neg V_1}$	$\boldsymbol{V_2}$	$\boldsymbol{\neg V_2}$	$\boldsymbol{V_3}$	$\boldsymbol{\neg V_3}$
1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1

Z tabulky plyne, že jediné dvě možné situace, které vedou k tomu, že všechny tři navigace opravdu lhaly jsou ty, kde buď do centra vedou Průjezdná a Rychlá nebo do centra vede pouze Průjezdná.

Je to tedy jedna nebo druhá možnost. Ani v jedné z těchto možností do centra nevede cesta Zkratková, čili tam je šance nulová, 50% šanci má Viktor, pokud se vydá po Rychlé a jistotu bude mít, když pojede po Průjezdné.

Problem no.2 : A VERY ODD FAMILY STORY

The girls were not twins because more than two children were born at that moment; therefore, they must have been at least triplets.

The next riddle hides the number *seven*: if we remove the letter *s*, we are left with *even*.

This means that the children were septuplets.

It is also stated that no life was lost, so all the children were born alive and survived. A well-documented case matching this description is from 1997 — the McCaughey septuplets.

The names of the children are: **Kenneth, Nathan, Brandon Joel, Alexis, Natalie, and Kelsey.**

Úloha č.3: I NUDA SE POČÍTÁ

Označíme hledaná čísla $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a + b + a - b + a \cdot b + \frac{a}{b} = 32$$

Protože součet, rozdíl a součin dvou celých čísel je vždy celé číslo, a výsledek je 32, také celé číslo, musí i podíl těchto čísel vyjít jako celé číslo, tedy musí platit, že číslo a je násobkem čísla b: $a = k \cdot b$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

$$k \cdot b + b + k \cdot b - b + k \cdot b \cdot b + \frac{k \cdot b}{b} = 32$$

$$kb^2 + 2kb + k = 32$$

$$k(b^2 + 2b + 1) = 32$$

$$k(b + 1)^2 = 32$$

Nějaký součin se rovná číslu 32, může to být

$k = 1,\ (b + 1)^2 = 32 \rightarrow$ nevyhovuje, 32 není druhou mocninou celého čísla

$k = 2, (b + 1)^2 = 16 \rightarrow b = -5, a = -10$, nebo $b = 3, a = 6$

$k = 4, (b + 1)^2 = 8 \rightarrow$ nevyhovuje, 8 není druhou mocninou celého čísla

$k = 8, (b + 1)^2 = 4 \rightarrow b = -3, a = -24$ nebo $b = 1, a = 8$

$k = 16, (b + 1)^2 = 2 \rightarrow$ nevyhovuje, 2 není druhou mocninou celého čísla

$k = 32, (b + 1)^2 = 1 \rightarrow b = -2, a = -64$ nebo $b = 0, a = 0$ (ale $a \neq b$).

Vyhovují dvojice $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \in \{[\mathbf{-10}, \mathbf{-5}], [\mathbf{6}, \mathbf{3}], [\mathbf{-24}, \mathbf{-3}], [\mathbf{8}, \mathbf{1}], [\mathbf{-64}, \mathbf{-2}]\}$