Matematicko-logická soutěž

Řešení – květen 2018

Úloha č. 1

Zadaný čtyřúhelník je sice obecný, tj. není ani pravoúhlý, ani nemá rovnoběžné strany, přesto má unikátní vlastnosti a je možné ho řešit dokonce několikerým způsobem.

Tradiční řešení spočívá v rozdělení na čtyři rovnoramenné trojúhelníky, z nichž každý má délku ramen rovnou poloměru kruhu. Vrcholové úhly jsou 36°, 72°, 108° a 144°.

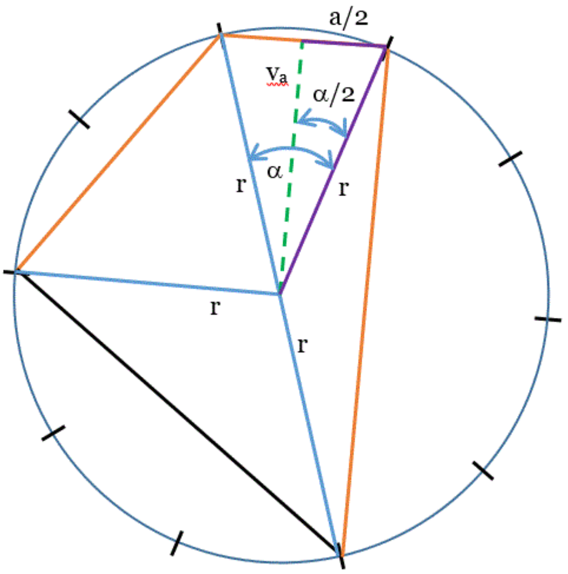
Každý rovnoramenný trojúhelník klasicky rozdělíme na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, které můžeme snadno řešit pomocí goniometrických funkcí.

Přeponou je u všech osmi (čtyř rozdělených) pravoúhlých trojúhelníků poloměr kruhové desky – r.

Protilehlou odvěsnu tvoří polovina základny – a/2

Známe jeden z úhlů (při středu S)

Přilehnou odvěsnou ke známému úhlu je tedy výška vedená ze základny k vrcholu rovn. trojúhelníku - v_a



Délku základny i výšky určíme podle vzorců:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{r}$$

$$\frac{a}{2}=r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$¿\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{v_a}{r}$$

$$v_a=r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

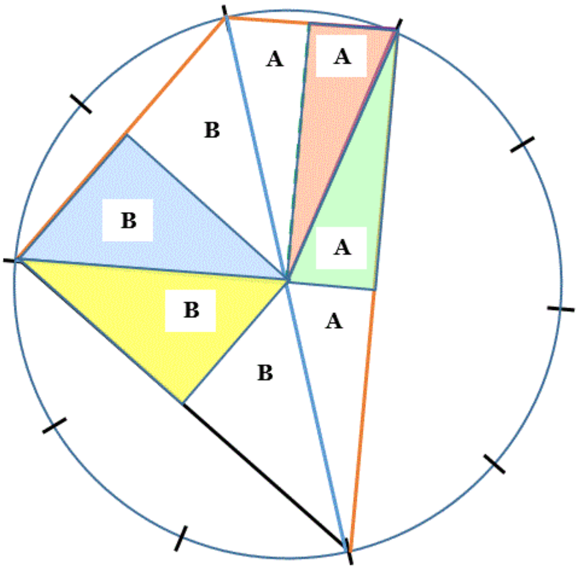
Nyní můžeme určit vzorec pro obsah trojúhelníku:

$$S_{trojúhelníku}=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{a}{2}\cdot v_a$$

$$S_{trojúhelníku}=r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=r^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

trojúhelník	velikost úhlu **α** [°]	poloměr **r** [m]	strana **a/2** [m]	výška v_a [m]	$S_{trojúhelníku}$ [m²]
1	36	1	0,309	0,951	0,294
2	72	1	0,588	0,809	0,476
3	108	1	0,809	0,588	0,476
4	144	1	0,951	0,309	0,294
Σ	360			Σ	**1,539 m²**

Tento vzorec je možné dál zjednodušit, ale pro naše potřeby to již není nutné.



Jak jsme již uvedli, je možné využít i jiné, méně univerzální, ale zato jednodušší řešení.

Stačí si uvědomit, že náš čtyřúhelník je možné rozdělit na osm pravoúhlých trojúhelníků (v podstatě stejných, na jaké jsme obrazec postupně dělili i v předešlém řešení) a ve využití skutečnosti, že jsou si vždy čtyři a čtyři podobné.

$S_{čtyřúhelníku} = 4 \cdot S_{trojúhelník\ A} + 4 \cdot S_{trojúhelník\ B}$

Obsahy trojúhelníků vypočítáme obdobně jako u předchozího řešení.

Úloha č. 2

Tento příklad vychází ze starých středověkých úloh o převoznících, které dávní matematici vymýšleli pro pobavení vznešené společnosti svých mecenášů.

Její řešení nejlépe objasníme s pomocí následující tabulky:

Malé město				Velitelství
P-1, I-1, P-2, I-2, P-3, I-3				nikdo
P-2, I-2, P-3, I-3	→	P-1, I-1	→	P-1, I-1
P-1, P-2, I-2, P-3, I-3	←	P-1	←	I-1
P-1, P-2, P-3	→	I-2, I-3	→	I-1, I-2, I-3
P-1, I-1, P-2, P-3	←	I-1	←	I-2, I-3
P-1, I-1	→	P-2, P-3	→	P-2, I-2, P-3, I-3
P-1, I-1, P-3, I-3	←	P-3, I-3	←	P-2, I-2
I-1, I-3	→	P-1, P-3	→	P-1, P-2, I-2, P-3
I-1, I-2, I-3	←	I-2	←	P-1, P-2, P-3
I-3	→	I-1, I-2	→	P-1, I-1, P-2, I-2, P-3
I-2, I-3	←	I-2	←	P-1, I-1, P-2, P-3
nikdo	→	I-2, I-3	→	P-1, I-1, P-2, I-2, P-3, I-3

Jak je vidět, opravdu bylo možné se dopravit na velitelství a neohrozit svého vlastního práskače, ale určitě by bylo mnohem jednodušší, kdyby si policisté vzájemně důvěřovali.

Nezbývá než doufat, že se opravdu jedná o pouhou matematickou hříčku a nikoli o reálnou situaci.

Samozřejmě je možné několik dalších analogických řešení, ovšem princip úlohy zůstává stejný.

Úloha č. 3

The task is to divide 20,000 crowns between the students with good results. The first grade students will receive 3,000, the second grade 2,000 and the third 500 crowns.

It is known that there are 30 students in the class, but one third of them doesn´t deserve the reward – so only 20 students left.

The way we can divide the money can be described thanks to the following charts, the examples of unsuitable solutions are listed here:

	počet studentů	odměna za studium [tis Kč]	celkově [tis Kč]		
	20	3	60		
	0	2	0		
	0	0,5	0		
Σ	20		**60**	>	**20 tis Kč**

	počet studentů	odměna za studium [tis Kč]	celkově [tis Kč]		
	0	3	0		
	0	2	0		
	20	0,5	10		
Σ	20		**10**	<	**20 tis Kč**

We can find two correct solutions exactly by proofing:

	počet studentů	odměna za studium [tis Kč]	celkově [tis Kč]		
	1	3	3		
	5	2	10		
	14	0,5	7		
Σ	20		**20**	=	**20 tis Kč**

	počet studentů	odměna za studium [tis Kč]	celkově [tis Kč]		
	4	3	12		
	0	2	0		
	16	0,5	8		
Σ	20		**20**	=	**20 tis Kč**