Matematicko-logická soutěž - řešení - květen 2019

Úloha č. 1

K rozhodnutí, zda existuje trojúhelník, jehož výšky mají délku 4, 7, a 10 metrů, máme zdánlivě velmi málo údajů. Pokud si ale uvědomíme, že obsah počítáme jako polovinu součinu strany a příslušné výšky, úloha se okamžitě zjednoduší:

$$S_{trojúhelníku}=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2}$$

Není nic jednoduššího, než vyjádřit jednotlivé strany a dosadit:

$$a=\frac{2S}{v_a}=\frac{2S}{4}$$
$$b=\frac{2S}{v_b}=\frac{2S}{7}$$
$$c=\frac{2S}{v_a}=\frac{2S}{10}$$

Nyní už stačí pouze porovnat strany pomocí pravidla trojúhelníkové nerovnosti, vzniklou nerovnost nejprve vydělíme 2S, poté vynásobíme nejmenším společným násobkem – tedy 140:

$$\begin{array}{ccc} a+b>c & a+c>b & b+c>a \\ \frac{2S}{4}+\frac{2S}{7}>\frac{2S}{10} & \frac{2S}{4}+\frac{2S}{10}>\frac{2S}{7} & \frac{2S}{7}+\frac{2S}{10}>\frac{2S}{4} \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{7}>\frac{1}{10} & \frac{1}{4}+\frac{1}{10}>\frac{1}{7} & \frac{1}{7}+\frac{1}{10}>\frac{1}{4} \\ 35+20>14 & 35+14>20 & 20+14>35 \\ 55>14 & 49>20 & 34>35 \end{array}$$

V prvních dvou případech nedošlo ke konfliktu, ale ve třetím, kdy jsme porovnávali součet stran **b** a **c** se stranou **a**, jsme narazili na problém. Je tedy jasné, že trojúhelník, jehož výšky mají délku 4, 7, a 10 metrů, nemůže existovat.

Úloha č. 2

Any complex fraction can be simplified to a basic form, which means a fraction with only one fraction line. This one will be the smallest in case the factor is of minimal and the denominator is of maximal value.

`x = ((((((((9/8)/7)/6)/)5)/4)/3)/2) = 9/(8·7·6·5·4·3·2) =` 1/4480

In contrary, the highest result will not be obtained by the opposite course of action. We should divide the first number (nine) by the fraction of minimal value formed of the remaining numbers:

`x = 9/(((((((8/7)/6)/)5)/4)/3)/2) = (9·7·6·5·4·3·2)/8 =` 5670

Úloha č. 3

Toto je klasická úloha, která vede na soustavu rovnic. Matějovy úspory označíme - M, Kubovy úspory – K

První rovnici získáme z faktu, že Kuba měla našetřeno o 600 Kč víc než Matěj:

$$K = M + 600$$

Druhá rovnice zohledňuje cenu hry – víme, že je to trojnásobek Matějových úspor – nebo také polovina úspor každého z bratrů:

$$3 \cdot M = \frac{1}{2} \cdot M + \frac{1}{2} \cdot K$$

Získaná soustava je velmi jednoduchá:

$$K = M + 600$$
$$3 \cdot M = \frac{1}{2} \cdot M + \frac{1}{2} \cdot K$$

Jejím řešením snadno zjistíme, že Matěj měl naspořeno 150 Kč, Kuba 750 Kč a vysněná hra stála 450 Kč.