

Matematicko-logická soutěž

Školní rok 2023/24 - leden 2024 - řešení

Úloha č. 1

Pro řešení úlohy tohoto typu (tedy úlohy o společné práci) je nutné si stanovit jakousi časovou jednotku, ke které vztáhneme jednotlivé položky. V případě plnění nádrže vodou pomocí čerpadla se jeví být vhodnou časovou jednotkou 1 hodina.

Prvním čerpadlem se za jednu hodinu naplní jedna dvanáctina ($1/12$) nádrže a druhým jedna šestina ($1/6$). Pokaženým stavidlem za jednu hodinu odteče osmina ($1/8$) nádrže.

Množství vody v nádrži po první hodině napouštění tedy můžeme snadno vyčíslit – nádrž bude zaplněná z:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{4+2-3}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Nyní je i pouhou úvahou jasné, že pokud naplníme za hodinu osminu nádrže, celou ji naplníme za osm hodin.

Pro řešení této úlohy můžeme také sestavit rovnici o jedné neznámé:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} - \frac{x}{8} = 1$$

Kde x je potřebný počet hodin. Jednička na pravé straně označuje samozřejmě hledanou jednu plnou nádrž. Pro odstranění zlomků rovnici vynásobíme číslem 24.

$$4x + 2x - 3x = 24$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

Jak je vidět, opravdu vychází naprosto stejný údaj, jako když jsme úlohu řešili úvahou.

Úloha č. 2

What's interesting about this task is that we should assess both the price of the tickets and the number of the students but we only know the total price and the fact that each fifth ticket is free. We also know that the ticket price is the whole number ending in zero.

It is known that 4A class students got four free tickets – so for sure there were minimal number of 20 but maximal number of 24 tickets. Let's count the entrance fee for all five options given.

4A class ticket price	Number of students	Number of paid tickets	Single ticket price
19 950,00 Kč	20	16	1 246,88 Kč
19 950,00 Kč	21	17	1 173,53 Kč
19 950,00 Kč	22	18	1 108,33 Kč
19 950,00 Kč	23	19	1 050,00 Kč
19 950,00 Kč	24	20	997,50 Kč

As we can see the only possible solution is 23 students in class 4A.

Let's add unknown number of 4B class students. But it's easy to assess it since we know that the total amount of money for paid ticket was 44,100 crowns.

4A + 4B class ticket price	Single ticket price	Number of paid tickets	Number of free tickets	Number of students
44 100,00 Kč	1 050,00 Kč	42	10	52

Now, as we know the total amount of students and the number of 4A class students we can assess the number of 4B class students quite easily.

Number of 4A + 4B class students	Number of 4A class students	Number of 4B class students
52	23	29

Úloha č. 3

Třetí příklad bude tentokrát velmi hravý a poměrně dost jednoduchý.

Vyjádřete číslo milion (1 000 000) pomocí čísel a matematických operací obsahujících pouze číslice 9 a algebraických operací plus, minus, krát, děleno, mocnina a odmocnina. **Určete alespoň tři (ale klidně můžete zkusit najít i víc) různá řešení.**

Řešení:

Tato úloha (zapsat číslo 1000000 pouze pomocí devítek a matematických operací) má velké množství různě zajímavých řešení, takže pro ilustraci uvedeme pouze některá z nich.

Jedno z nejdelších – ale bohužel současně nejméně vtipných - řešení je milionkrát sečíst podíl devítek, tedy jedničku:

$$\frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + (\text{neustále opakujeme } \dots) + \frac{9}{9} = 1000000$$

Naopak jedno z nejjednodušších řešení je toto:

$$999999 + \frac{9}{9} = 1000000$$

Několik dalších zajímavých řešení:

$$\left(99 + \frac{9}{9}\right)^{\sqrt{9}} = 1000000$$

$$\frac{9999999}{9} - \frac{999999}{9} = 1000000$$

$$\left(999 + \frac{9}{9}\right) \cdot \left(999 + \frac{9}{9}\right) = 1000000$$

$$\left(999 + \frac{9}{9}\right)^{\left(\frac{9}{9} + \frac{9}{9}\right)} = 1000000$$

...