Matematicko-logická soutěž

Listopad 2025/26

Svá řešení odevzdávejte písemně nebo elektronicky Mgr. Kopřivové (koprivova@teleinformatika.eu) nebo Ing. Knápkovi (knapek@teleinformatika.eu) nejpozději o půlnoci posledního dne v daném měsíci. Každé kolo bude vyhodnoceno samostatně, body se budou sčítat za všechna kola. Soutěžící, který bude mít v červnu na svém kontě nejvíce získaných bodů, získá odměnu.

Úloha č.1 : SPOLEČNÝ JMENOVATEL

Igor provádí matematické operace se třemi jemu známými zlomky $\frac{1}{A}$; $\frac{1}{B}$ a $\frac{1}{C}$, kde A, B, C jsou přirozená čísla. Zatím si zvolil nejmenší společné jmenovatele pro součty těchto zlomků.

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{?+?}{3^8}$$

$$\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{C}+\frac{1}{A}=\frac{?+?}{3^9}$$

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{C}+\frac{1}{B}=\frac{?+?}{3^{11}}$$

Najdi čísla A, B a C.

Problem no. 2: AUTUMN FAIR NUT MIX

At the autumn fair, Mrs. Nutley sells a mix of hazelnuts, walnuts, and almonds.
For 100 grams of the mix, which contains 10 grams more walnuts than almonds, she charges 48 CZK.

Knowing that

- 100 g of hazelnuts costs 40 CZK,
- 200 g of walnuts costs 90 CZK,
- 1 kg of almonds costs 600 CZK,

how many grams of each type of nut are in the mix?

Úloha č. 3: ČARODĚJNÝ DŮM

Čarodějnice si staví nový domek za peníze, které utržila prodejem halloweenských sladkostí.
Průřez střechy má mít tvar pravoúhlého trojúhelníku, protože právě tak nejvíce vyhovuje odpočívajícím netopýrům.

Délka jeho přepony má být $\frac{\sqrt{5}}{2}$ metru. O zbylých stranách trojúhelníku víme, že jedna je dvakrát delší než druhá.

Urči délky obou odvěsen (zbývajících rozměrů průřezu střechy).

Řešení:

Úloha č.1 : SPOLEČNÝ JMENOVATEL

Čísla A, B, C jsou dělitelé mocnin tří, a tedy samy jsou mocniny čísla tři, $A = 3^x, \quad B = 3^y, \quad C = 3^z$

Platí, že

$n(A \cdot B, C) = 3^8 \rightarrow x + y \leq 8$ a $z \leq 8$ a alespoň jedno z nich je přesně 8.

$n(B \cdot C, A) = 3^9 \rightarrow y + z \leq 9$ a $x \leq 9$ a alespoň jedno z nich je přesně 9. Ale hned vidíme, že x nemůže být rovno 9, neodpovídalo by to předchozí rovnosti, proto $y + z = 9$.

$n(A \cdot C, B) = 3^{11} \rightarrow x + z \leq 11$ a $y \leq 11$ a alespoň jedno z nich je přesně 11. Ovšem y nemůže být rovno 11, což vyplývá z předchozích nerovností, tedy $x + z = 11$.

Zůstáváme tedy u dvou možností:

1) $x + y = 8 \rightarrow$ pak dopočtem ze zbylých rovnic $z = 6, y = 3, x = 5$
2) $z = 8 \rightarrow$ pak dopočtem ze zbylých rovnic $y = 1$ a $x = 3$.

Pro hledaná čísla máme tedy dvě řešení:

1) $A = 243, \quad B = 27, \quad C = 729$
2) $A = 27, \quad B = 3, \quad C = 6561$

Problem no. 2: AUTUMN FAIR NUT MIX

	CZK per 100 g	CZK per 1 g	Grams in the mix
Hazelnuts	40	0,4	y
Walnuts	45	0,45	$x + 10$
Almonds	60	0,6	x

$$y + x + 10 + x = 100$$

$$0{,}4y + 0{,}45(x + 10) + 0{,}6x = 48$$

$$\rightarrow x = 30, x + 10 = 40, y = 30.$$

The mix contains **30 g of hazelnuts**, **40 g of walnuts**, and **30 g of almonds**.

Úloha č. 3: ČARODĚJNÝ DŮM

Označme odvěsny a a $b$tak, že $b = 2a$. Přepona je $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Použijeme Pythagorovu větu:

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \; a^2 + (2a)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

$$a^2 + 4a^2 = \frac{5}{4} \rightarrow \; 5a^2 = \frac{5}{4} \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \; a = \pm\frac{1}{2} \rightarrow 0 \rightarrow \mathrm{a} = \frac{1}{2}$$

Pak $\quad b = 2a = 1.$