Matematicko-logická soutěž

Říjen 2023

Úloha č. 1

Úlohu budeme řešit pomocí dělitelnosti. Nejprve zjistíme, jaké množství (kolik dílů) jednotlivých složek je v míchaném nápoji, aby byly ceny obou složek stejné:

$$8x=12y$$
$$2x=3y$$

Nalezneme **x** a **y**, taková, aby platila uvedená rovnost, tedy **x=3** a **y=2.**

Pokud rozdílíme obsah sklenice na pět dílů, Ve sklenici jsou tedy 3 díly (neboli 1,2 dl) jablečného a 2 díly (neboli 0,8 dl) pomerančového džusu. **Cena tohoto množství jablečného džusu i pomerančového džusu je stejné a to 4,80 Kč, takže cena celého míchaného nápoje je 9,60 Kč.**

Úloha č. 2

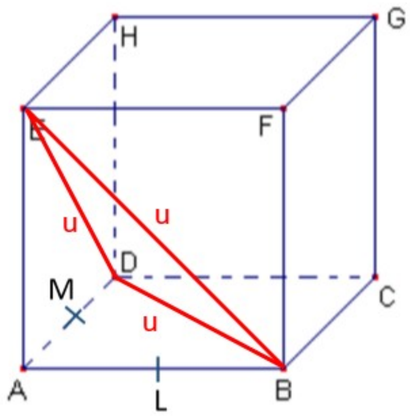
16 Girls = 5th graders

32 boys = 4th graders

12 students from other schools = 2nd graders

Úloha č. 3

Tato úloha je zcela teoretická, počítá se obecně. Označíme-li stranu krychle **a**, pak můžeme obecně určit obsahy obou trojúhelníků **S₁** a **S₂**. Pro určení obsahu trojúhelníku můžeme použít několik vzorců, zde se nabízí buď klasický výpočet přes výšku trojúhelníku (jak jsme v řešení použili zde) nebo také univerzální Heronův vzorec.

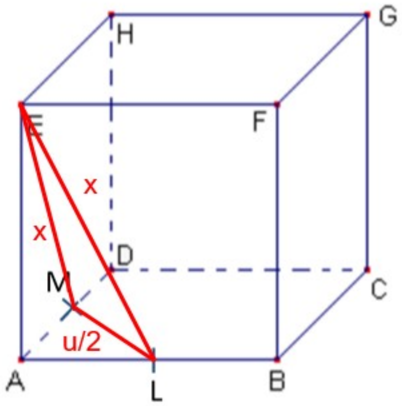


S_1 je obsah rovnostranného trojúhelníku **EBD**, jehož všechny tři strany jsou stěnové úhlopříčky **u** krychle ABCDEFGH, tak jednu z nich označíme jako základnu, druhé dvě jako ramena rovnoramenného trojúhelníku.

$$z=u=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\cdot a$$

$$v_z=\sqrt{u^2-\left(\frac{u}{2}\right)^2}=\sqrt{u^2-\frac{u^2}{4}}=\sqrt{\frac{3u^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\cdot u}{2}=\frac{\sqrt{6}\cdot a}{2}$$

$$S_1=\frac{z\cdot v_z}{2}=\frac{a\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{a\cdot\sqrt{6}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{2}$$



S_2 je obsah rovnoramenného trojúhelníku **ELM**, jehož základnou **z** je polovina stěnové úhlopříčky **u** krychle ABCDEFGH a jehož ramena tvoří úhlopříčka **x** obdélníku o stranách **a** a **a/2**.

$$z=\frac{u}{2}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2}=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{z}{2}=\frac{u}{4}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{4}=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{4}$$

$$x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}\cdot a^2}=\frac{a\cdot\sqrt{5}}{2}$$

$$v_z=\sqrt{x^2-\left(\frac{z}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a\cdot\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}-\frac{2a^2}{16}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}-\frac{a^2}{8}}=\sqrt{\frac{9a^2}{8}}=\frac{3a}{2\cdot\sqrt{2}}$$

$$S_2=\frac{z\cdot v_z}{2}=\frac{\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3a}{2\cdot\sqrt{2}}}{2}=\frac{3a^2}{8}$$

Nyní už není problém určit kolikrát se menší trojúhelník **ELM** „vejde“ do většího **EBD**, neboli určit poměr obou obsahů S1 : S2:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{2}}{\frac{3a^2}{8}}=\frac{\sqrt{3}\cdot a^2\cdot 8}{2\cdot 3a^2}=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Číselně vyjádřeno – menší trojúhelník ELM se do většího EBD vejde 2,309 krát.