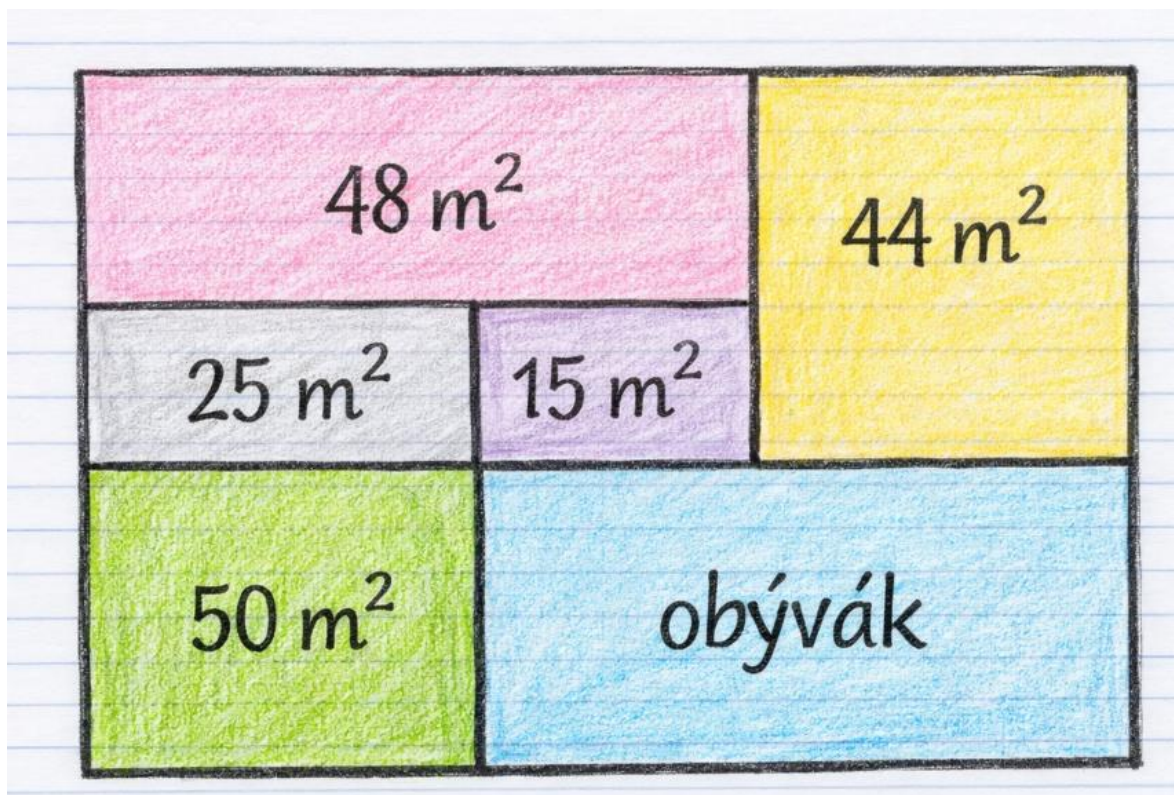


Matematicko-logická soutěž

Únor 2025/26

Svá řešení odevzdávejte písemně nebo elektronicky Mgr. Kopřivové (koprivova@teleinformatika.eu) nebo Ing. Knápkovi (knapek@teleinformatika.eu) nejpozději o půlnoci posledního dne v daném měsíci. Každé kolo bude vyhodnoceno samostatně, body se budou sčítat za všechna kola. Soutěžící, který bude mít v červnu na svém kontě nejvíce získaných bodů, získá odměnu.

Úloha č.1: ROBOTICKÝ VYSAVAČ



Na plánu je znázorněn půdorys bytu, ve kterém robotický vysavač provádí vysávání s mopováním. Při úklidu postupně čistí jednotlivé místnosti. Po vyčištění každých 8 m^2 se vrací do nabíjecí stanice, kde vypere mopovací textilii. Při tomto procesu spotřebuje 100 ml vody z nádržky.

Vysavač právě dokončil úklid předposlední místnosti a zbývá mu vyčistit poslední místnost – obývací pokoj. Před jejím úklidem má v nádržce $0,9\text{ l}$ vody.

Kolik vody mu zbude v nádržce po úklidu celého bytu?

Problem no.2 : ROBBED BY A SANDWICH

In a malfunctioning vending machine, customers can pay only with 5 CZK, 10 CZK, and 20 CZK coins. A sandwich costs 83 CZK.

The machine also returns change using only these three types of coins, and no two returned coins may be the same.

If the exact amount of change cannot be returned under these rules, the machine returns the largest possible amount that satisfies them and keeps the rest.

A student inserts some coins into the machine to buy one sandwich. The machine returns change so that the student's loss is as small as possible, but the student still ends up overpaying by 7 CZK.

What is the minimum number of coins the student could have inserted into the machine?

Úloha č.3: ŘÍČNÍ ŽELVA DAROVALA LIDEM MAGICKÝ ČTVEREC

Podle čínské knihy „Devět kapitol o umění matematickém“ (3 století př. n. l.) darovala lidem na svém krunýři magický čtverec počítající želva z řeky Luo. Nejstarší takový čtverec se nazýval Luo-šu, měl rozměry 3x3 a obsahoval číslíce od 1-9 umístěných v mřížce tak, aby součty ve všech řádcích, sloupcích i úhlopříčkách dávaly stejné číslo – magickou konstantu. Na čtverci Luo-šu je založen i systém Feng-šuej učící o umění uspořádání.

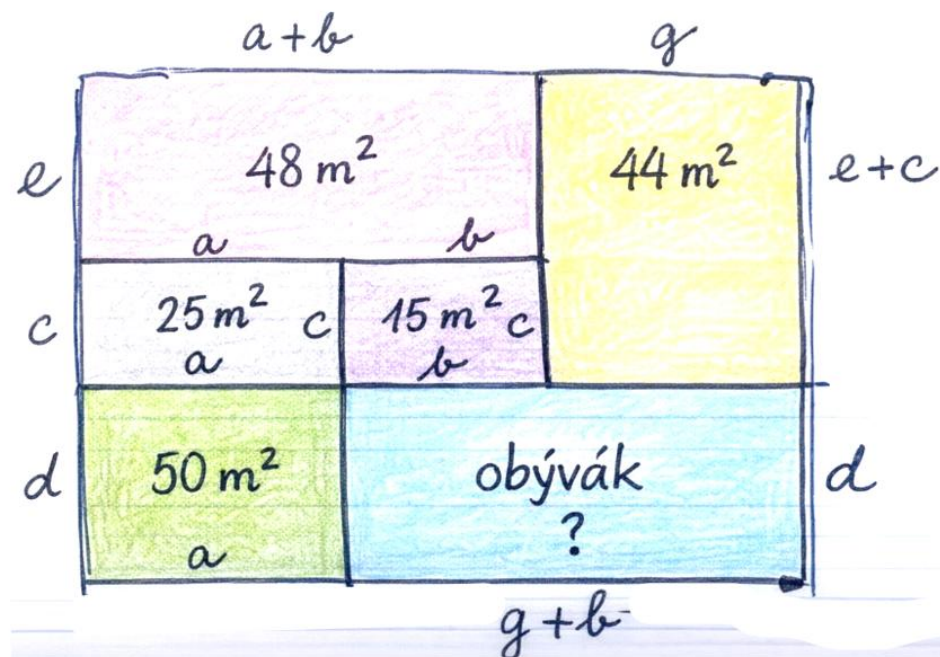
V následujícím magickém čtverci jsou čísla od 2 do 17, každé právě jednou.

17		4	D
	12	C	9
10	B	7	
A	15		2

Vypočítej $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$.

Řešení:

Úloha č.1: ROBOTICKÝ VYSAVAČ



Pomocí obsahů jednotlivých obdélníků sestavíme soustavu několika rovnic, z každé rovnice postupně vyjádříme jednu z neznámých pomocí proměnné c , ty pak dosadíme do rovnice pro celkový obsah obdélníku.

$$25 = ac \quad \rightarrow a = \frac{25}{c}$$

$$50 = ad \quad \rightarrow d = \frac{50}{a} = 2c$$

$$15 = bc \quad \rightarrow b = \frac{15}{c}$$

$$48 = e(a+b) \quad \rightarrow e = \frac{48}{a+b} = \frac{48}{\frac{25}{c} + \frac{15}{c}} = \frac{6c}{5}$$

$$44 = g(e+c) \quad \rightarrow g = \frac{44}{e+c} = \frac{44}{\frac{6c}{5} + c} = \frac{20}{c}$$

Obsah obývacího pokoje: $X = d(g+b)$

Celková plocha: $(e+c+d)(a+g+b) = 48 + 25 + 15 + 50 + 44 + X$

$$(e+c+d)(a+g+b) = 182 + X$$

$$\left(\frac{6c}{5} + c + 2c\right)\left(\frac{25}{c} + \frac{20}{c} + \frac{15}{c}\right) = 182 + X$$

$$\frac{21c}{5} \cdot \frac{60}{c} = 182 + X$$

$$21 \cdot 12 - 182 = X$$

$$X = 70$$

Když vjžděl do obývacího pokoje, měl uklizeno 182 m^2 . $182 = 22 \cdot 8 + 6 \rightarrow$ už má najeto 6 m^2 bez čištění mopů, v obývacíku ujede tedy 2 m^2 a vrací se čistit. Pak už zbývá 68 m^2 , na kterých proběhne čištění osm krát.

Na konci v nádržce nezbude žádná voda.

Problem no.2 : A MALFUNCTIONING VENDING MACHINE

The student should have paid **83 CZK**, but in the end he ended up overpaying by **7 CZK**.

The vending machine can return the following combinations of coins:

$$20 + 10 + 5, 20 + 10, 20 + 5, 20, 10 + 5, 10, 5$$

Therefore, it can return: 35, 30, 25, 20, 15, 10, and 5 CZK.

The situation could have occurred as follows:

Price of the item	All possible change combinations	Amount inserted	maximum possible change	Actual loss	
83	20+10+5	125	20+10+5	7	The only valid scenario
83	20+10	120	20+10+5	2	
83	20+5	115	20+10	2	
83	20	110	20+5	2	
83	10+5	105	20	2	
83	10	100	10+5	2	
83	5	95	10	2	

The student inserted 125 CZK into the machine. This amount can be paid using at least seven coins accepted by the machine: $125 = 6 \cdot 20 + 1 \cdot 5$.

The minimum number of coins the student could have inserted into the machine is 7.

Úloha č.3: ŘÍČNÍ ŽELVA DAROVALA LIDEM MAGICKÝ ČTVEREC

Magický čtverec má dvě řešení, ovšem čísla A, B, C, D seřazená od nejmenšího po největší jsou vždy 5,8,11,14.

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 = 406.$$

17	3	4	14
6	12	11	9
10	8	7	13
5	15	16	2

17	6	4	11
3	12	14	9
10	5	7	16
8	15	13	2